EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta ….056

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,1), B(0,2)$ și $O(0,0)$.

(4p) **a)** Să se calculeze distanța dintre punctele A și B.

(4p) **b)** Să se calculeze aria triunghiului AOB.

(4p) **c)** Să se calculeze $\cos\left(A\hat{O}B\right)$.

(4p) **d)** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât punctele A și B să aparțină dreptei de ecuație $ax + by - 2 = 0$.

(2p) **e)** Să se dea exemplu de un punct C, precizând coordonatele sale, pentru care $AC \perp AO$.

(2p) **f)** Să se dea exemplu de un punct D, precizând coordonatele sale, pentru care $DA = DB$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se dea un exemplu de mulțime cu elementele numere naturale, care conține numărul 8 și care are exact 8 submulțimi.

(3p) **b)** Să se dea un exemplu de ecuație de gradul al doilea pentru care produsul rădăcinilor este egal cu 8.

(3p) **c)** Să se dea un exemplu de funcție f de gradul al doilea pentru care $f(8) = 8$.

(3p) **d)** Să se dea un exemplu de numere reale a și b pentru care $\log_8(a-1) - \log_8(b+1) = 0$.

(3p) **e)** Să se dea un exemplu de matrice $A \in M_2(\mathbf{R})$ pentru care $\det(A) = 8$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^5 + x^3 + 1$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $(f \circ f)(0)$.

(3p) **c)** Să se determine punctul de inflexiune al graficului funcției f.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(2n)}{f(n)}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinomul $f = X^2 - 4X + 2 \in \mathbf{R}[X]$, funcția

$g : M_2(\mathbf{C}) \to M_2(\mathbf{C}), g(X) = X^2 - 4X + 2I_2$ şi matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$.

(4p) **a)** Să se arate că dacă x_1 şi x_2 sunt rădăcinile polinomului f, atunci $a = {x_1}^2 + {x_2}^2$ este un număr natural.

(4p) **b)** Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

(4p) **c)** Să se arate că $g(A) = O_2$.

(2p) **d)** Să se arate că $g(I_2) = f(1) \cdot I_2$.

(2p) **e)** Să se arate că matricea $B = f(1) \cdot I_2$ este inversabilă.

(2p) **f)** Să se arate că există o matrice $C \in M_2(\mathbf{C})$ astfel încât $g(I_2) - g(A) = (I_2 - A) \cdot C$.

(2p) **g)** Să se arate că dacă $X \in M_2(\mathbf{C})$ este o matrice pentru care $g(X) = O_2$, atunci matricea $I_2 - X$ este inversabilă.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^4 + 1}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(2p) **b)** Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

(4p) **c)** Să se arate că funcția f are două puncte de extrem local .

(4p) **d)** Să se arate că pentru orice număr real nenul x este adevărată inegalitatea $\dfrac{1}{x^4 + 1} \le \dfrac{1}{2x^2}$.

(2p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x)dx$.

(2p) **g)** Să se arate că pentru orice număr natural nenul m este adevărată inegalitatea $\int_0^m f(x)dx \le \dfrac{m^2}{2}$.